

На правах рукописи



Важенцева Надежда Владимировна

**Алгоритмическое обеспечение и комплекс программ
для томографической реконструкции
при неполных данных**

Специальность 05.13.18
«Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Новокузнецк – 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)»

Научный
руководитель:

Зеркаль Сергей Михайлович,
доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВПО
«Новосибирский государственный архитектурно-
строительный университет (Сибстрин)»

Официальные
оппоненты:

Рабинович Евгений Владимирович,
доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВПО
«Новосибирский государственный технический
университет», профессор кафедры вычислительной
техники

Решетникова Елена Васильевна,
кандидат технических наук, доцент, Новокузнецкий
институт (филиал) ФГБОУ ВПО «Кемеровский
государственный университет», заведующая
кафедрой математики и математического
моделирования

Ведущая
организация:

ФГБ УН «Институт вычислительной математики и
математической геофизики» Сибирского отделения
Российской академии наук

Защита состоится «16» апреля 2014 года в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д212.252.02 в ФГБОУ ВПО «Сибирский государственный индустриальный университет» по адресу: 654007, Россия, г. Новокузнецк, Кемеровской обл., ул. Кирова, 42.
Факс: (3843) 46-57-92, E-mail: sibsiu_ais@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Сибирский государственный индустриальный университет».

Автореферат разослан «15» марта 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



В.Ф. Евтушенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Вычислительная томография (ВТ) – новое направление в науке, возникшее во второй половине XX столетия, испытывающее интенсивное развитие и в настоящее время. Метод вычислительной (компьютерной) томографии позволяет по характеристикам пропущенного через исследуемый объект (трансмиссионная томография) или его собственного (эмиссионная томография) излучения судить о внутреннем устройстве, физическом состоянии или химическом составе этого объекта.

Особый интерес представляют томографические задачи, возникающие в условиях, когда просвечивание всего объекта невозможно по тем или иным причинам, что приводит к неполноте исходных (проекционных) данных в томографическом эксперименте. Задачи с неполными проекционными данными являются сравнительно мало изученными в отличие от постановок, использующих полные данные. Решению этих задач посвящено большое количество публикаций, однако общих методов их решения до сих пор не разработано. Существующие алгоритмы основаны на восстановлении объекта по имеющимся проекционным данным, при этом, как правило, привлекается априорная информация об исследуемом объекте. Аналог теоремы Пэли-Винера позволяет по известным проекциям построить однородный полином с коэффициентами, не зависящими от угла. Эти коэффициенты являются исходной информацией для синтеза (искусственного создания) неизвестных проекций. Такой подход позволяет без существенного ущерба для качества реконструкции снизить количество проекционных данных, что в медицине приводит к снижению дозы облучения пациента, в дефектоскопии (в том числе при эмиссионной диагностике объектов металлургии) – восстанавливать исследуемое изделие с приемлемой точностью в условиях ограниченного угла обзора, а также при наличии непрозрачных и полупрозрачных дефектов.

Особенный интерес решение задачи с неполными проекционными данными представляет для геотомографии как в условиях разведочной геофизики, так и при инженерных изысканиях (подготовка строительных площадок, строительство и эксплуатация метро), а также в горном деле (доразведка, эксплуатационный мониторинг месторождений угля).

Цель диссертации. Разработка метода томографической реконструкции по проекционным данным, полученным в ограниченном диапазоне углов сканирования.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Разработать математическую модель пополнения проекционных томографических данных, основанную на аналоге теоремы Пэли-Винера, в условиях ограничения на угол обзора объекта исследования. Эта

математическая модель должна содержать описание процесса получения полных данных в случае их неполноты с использованием математических понятий и формул, отражающих основные свойства, особенности этого процесса и должна быть пригодна для численной реализации на ЭВМ.

2. Разработать вычислительные алгоритмы, реализующие решение томографической задачи при отсутствии проекций на ряде пространственных направлений.

3. Провести вычислительные эксперименты для исследования возможностей разработанного алгоритма и его обоснования.

4. Разработать программное обеспечение для поставленной задачи и создать соответствующий программный комплекс, позволяющий синтезировать недостающие проекционные данные в отсутствующих пространственных направлениях.

Методы исследований.

Для решения поставленных в работе задач используются методы математического моделирования, вычислительной математики, линейной алгебры, интегральной геометрии, функционального анализа, теории некорректно поставленных задач, численные методы и методы проектирования программного обеспечения.

Научная новизна работы.

1. Математическая модель пополнения томографических данных в условиях неполноты проекционной матрицы, основанная на аналоге теоремы Пэли-Винера, отличающаяся общностью, поскольку не требует использования априорных знаний об объекте исследования, позволяющая решать обратную задачу томографии, используя как исходные проекционные данные, так и синтезированные.

2. Численный метод синтеза недостающих проекционных данных в отсутствующих пространственных направлениях, основанный на свойстве преобразования Радона для разложения моментов в однородный полином, отличающийся способом решения возникающей системы линейных уравнений и выбором максимального порядка используемых моментов.

3. Результаты численного исследования: помехоустойчивости, границ применимости разработанного алгоритма, зависимости от параметров системы наблюдений и результаты–рекомендации, необходимые для планирования томографического эксперимента.

4. Программный комплекс «Палладиум» для решения задач вычислительной томографии в условиях неполноты проекционной матрицы, основанный на алгоритмах синтеза отсутствующих проекционных данных.

Практическая значимость работы.

Разработанные в диссертации методы реконструкции при недостатке проекционных данных непосредственно могут быть использованы для решения многих прикладных задач томографии. На основе данных методов создано программное обеспечение, с помощью которого были

проведены эксперименты по реконструкции распределений плотности объекта. Проведённые исследования могут оказаться полезными при создании программного обеспечения рентгеновских компьютерных томографов для медицинской диагностики, промышленной дефектоскопии, экспериментальной физики, при геотомографических исследованиях и при металлургических мониторингах.

Материалы диссертации будут полезны преподавателям высших учебных заведений и их студентам при самостоятельной работе как дополнительный материал при изучении курсов «методы вычислений», «интегральная геометрия», а также при формировании специальных курсов «методы вычислительной томографии», «геотомография».

Реализация результатов работы.

Программный комплекс «Палладиум», предназначенный для решения томографической задачи в условиях ограничения на проекционные данные, внедрен и используется при обработке сейсмотомографической информации в ООО «Сибирская геофизическая служба». Программный комплекс был использован при обработке и интерпретации сейсмотомографической информации, полученной при проектировании полотна железнодорожной магистрали Адлер – Красная поляна, входящей в число сооружений Олимпийского комплекса в г. Сочи.

Предмет защиты. Научные результаты, выносимые на защиту:

1. Математическая модель пополнения томографических данных в условиях неполноты проекционной матрицы, основанная на аналоге теоремы Пэли-Винера.
2. Численный метод синтетического пополнения недостающих проекционных данных в отсутствующих пространственных направлениях.
3. Программный комплекс «Палладиум» для решения задач вычислительной томографии.
4. Результаты численного исследования вычислительного алгоритма, определяющие границы применимости, устойчивость к дестабилизирующим факторам (особенности системы наблюдений, объекта исследования, случайный шум в каналах приема сигнала).

Личный вклад автора в проведенное исследование заключается в разработке алгоритма восстановления неизвестных проекций в двумерном случае; планировании и проведении вычислительных экспериментов для исследования предлагаемого метода, в том числе разработка моделей различных дефектов (объектов исследования); разработке и создании программного обеспечения для решения задач компьютерной томографии.

Степень достоверности результатов.

Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается анализом разработанных численных алгоритмов и проведением численных экспериментов. Все полученные результаты не противоречат известным научным положениям, экспериментальным и теоретическим результатам других работ. Основные научные положения, выводы и заключения,

сформулированные в диссертации, обоснованы и достоверны, так как базируются на корректном использовании методов вычислительной математики, линейной алгебры, интегральной геометрии, функционального анализа, теории некорректно поставленных задач, объектно-ориентированного программирования.

Моделирование и вычислительный эксперимент проводились с использованием разработанного программного обеспечения, реализованного на языке программирования C#.

Апробация работы.

Результаты работы докладывались на XLVI, XLVII и XLVIII международных научных конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2008, 2009, 2010), молодежной международной научной школе-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 2009), международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика» (Новосибирск, 2011), XII и XIII всероссийских конференциях молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2011, 2012), V всероссийской научно-технической конференции «Актуальные вопросы строительства» (Новосибирск, 2012), международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики» (Новосибирск, 2012), международной молодежной конференции «Нелинейные динамические системы: моделирование и оптимизация управления» (Новосибирск, 2012), международной научно-практической конференции «Наукоемкие технологии разработки и использования минеральных ресурсов» (Новокузнецк, 2013), X международной научно-практической конференции «Природные и интеллектуальные ресурсы Сибири» (Новокузнецк, 2013).

Научные семинары под руководством д.ф.-м.н. Воскобойникова Ю.Е. в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)» (Новосибирск, 2010, 2011, 2012). Научный семинар под руководством д.ф.-м.н. Чеверды В.А. в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН» (Новосибирск, 2013).

Публикации.

Результаты опубликованы в 19 работах, в число которых входит 2 статьи в переводных журналах, рекомендованных ВАК РФ, 4 статьи в рецензируемых трудах конференций, 4 статьи в рецензируемых журналах и 9 тезисов докладов.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, библиографического списка, приложения и содержит 117 страниц

основного текста, включая таблицы и рисунки. В приложении приводятся справка о внедрении и свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программный комплекс «Палладиум»».

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследований, показана научная новизна работы, отмечена её практическая значимость, указаны имеющиеся и перспективные направления использования полученных результатов, сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава **«Математические основы метода вычислительной томографии»** содержит необходимые сведения по математическим и физическим основам метода вычислительной томографии. Рассматривается интегральное преобразование Радона в прямом и обратном вариантах, используемые схемы сканирования (снятия проекционных данных), известные вычислительные алгоритмы реконструкции, т.е. алгоритмы решения томографической задачи, использующие полную проекционную матрицу.

Физические условия выполнения томографического эксперимента: объект исследования (например, тело человека, приповерхностный слой Земли, промышленные изделия или конструкции) помещается в пространство между источником (источниками) и приемником (приемниками) зондирующего сигнала (система наблюдений, см. рис.1). При фиксированном положении системы наблюдений выполняются измерения отклика объекта исследования на пропущенный через него сигнал. Эти данные называют проекцией. Набор проекций называют проекционной матрицей (проекционными данными), столбцы (или строки) которой соответствуют проекциям для различных направлений.

Математическая модель классической вычислительной томографии, основанная на интегральном преобразовании Радона, располагает проекционной матрицей (проекционные данные), элементы которой являются откликом объекта исследования на зондирующий сигнал и представляющие собой интегральные характеристики искомых параметров исследуемого объекта, построенной при системе наблюдений без ограничений на угол обзора объекта. В случае невозможности полных измерений определенная часть строк (столбцов) проекционной матрицы отсутствует, что делает невозможным использование традиционного математического аппарата вычислительной томографии (использование формул обращения интегрального преобразования Радона или его алгебраизация).

Математическое описание процесса взаимодействия зондирующего сигнала с объектом исследования и получения соответствующего отклика задаётся интегральным преобразованием Радона (1), где подынтегральная

функция, имеющая, например, физический смысл коэффициента поглощения энергии зондирующего сигнала (рентгеновская томография) или коэффициента преломления (сейсмическая томография), подлежит определению, а значения интеграла есть результат измерения амплитуды сигнала на входе приемника или время пробега сигнала вдоль лучевой траектории, соединяющей источник и приемник сигнала.

Преобразование, ставящее в соответствие функции двух переменных $g(\vec{x}) = g(x, y)$ набор её интегралов вдоль прямых, называется двумерным преобразованием Радона. Оно определяется следующим образом

$$f(t, \vec{\xi}) = \int g(\vec{x}) \delta(t - \langle \vec{\xi}, \vec{x} \rangle) d\vec{x}, \quad (1)$$

где использован символ δ -функции, интегрирование ведется по гиперплоскости $\langle \vec{\xi}, \vec{x} \rangle = t$, $\vec{\xi}$ – нормаль к гиперплоскости, t – расстояние от гиперплоскости до начала координат, $\langle \vec{\xi}, \vec{x} \rangle$ – скалярное произведение векторов $\vec{\xi}$ и \vec{x} , гиперплоскость – прямая, соединяющая источник и приемник. Для двумерного преобразования Радона имеет место формула обращения, которая может быть записана в виде

$$g(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho \cos(\theta - \varphi) - t} \frac{\partial}{\partial t} f(t, \theta) dt \right) d\theta. \quad (2)$$

Связь между пространствами (t, θ) , (ρ, φ) и (x, y)

$$\rho \cos \varphi \cos \theta + \rho \sin \varphi \sin \theta - t = 0;$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Из выражения (2) видно, что оценка искомой функции g по конечному набору проекционных данных будет тем лучше, чем точнее будут аппроксимированы интегралы. В частности отсюда следует, что проекции должны быть равномерно распределены в интервале $[0, \pi]$, что при решении практических задач часто не соблюдается (поскольку просто невозможно). В связи с этим возникают трудности, которые не позволяют в таких ситуациях использовать аппарат вычислительной томографии на полных данных.

На практике значения интегралов можно измерить только для конечного числа прямых. Расположение этих прямых, которое мы будем называть *схемой сканирования*, определяется конструкцией сканера. В основном используются две схемы сканирования (рис. 1). *Параллельная схема* представляет собой систему равноудаленных друг от друга параллельных прямых, заданную для нескольких направлений,

разделенных равными угловыми интервалами. В этом случае требуется один источник и один детектор, которые движутся параллельно друг другу и поворачиваются в процессе сканирования. В *веерной схеме* сканирования источник описывает окружность вокруг тела, испуская веер рентгеновских лучей, которые регистрируются линейкой детекторов. Параллельное сканирование применялось в сканере А. Кормака образца 1963 г. и в первом коммерческом сканере, разработанном Дж. Хаунсфилдом.

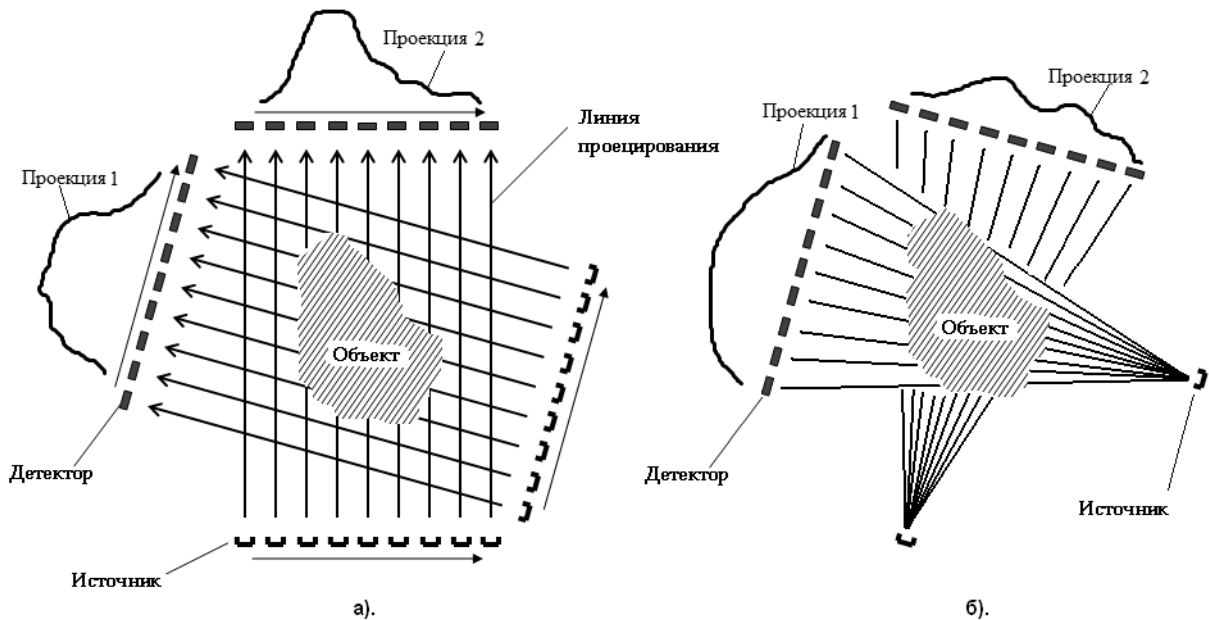


Рис. 1. Схемы сканирования

а) круговая геометрия измерений с параллельными проекциями

б) веерная схема сканирования

Результаты измерений в томографическом эксперименте представляются в виде проекционной матрицы, проекцией называется вектор измерений, полученный при фиксированном угле сканирования (рис. 1).

Во второй главе «Томографическая реконструкция при ограничениях на угол сканирования на основе пополнения проекционных данных» приводятся постановка задачи и описание разработанного метода, а также результаты численного исследования разрешающей способности алгоритма и его помехоустойчивости.

Поскольку, как отмечалось выше, при отсутствии части проекционных данных использование алгоритмического аппарата классической вычислительной томографии становится невозможным, ставится следующая научная задача: в результате томографического эксперимента некоторые проекции отсутствуют, требуется, используя имеющиеся проекции, выполнить процедуру пополнения проекционных данных таким образом, чтобы стала возможной томографическая реконструкция.

Ситуации, приводящие к неполноте проекционных данных, например: 1) диагностика вышележащего пространства в условиях метрополитена, 2) диагностика межскважинного пространства, в условиях межскважинного сейсмического просвечивания. В первом случае источники и приемники располагаются на плоскости дневной поверхности и в тоннеле метрополитена, «сверху» и «снизу», а боковой обзор отсутствует. Во втором случае источники и приемники располагаются на ломаной линии, образующей букву «П», в этом случае отсутствует обзор «снизу». Аналогичная ситуация возникает при диагностике состояния железнодорожной насыпи, в этом случае имеются данные на ломаной линии, представляющей собой боковые стороны и верхнее основание трапеции, на нижнем основании обзор отсутствует. Похожие ситуации возникают в горном деле. Кроме того в медицинской томографии, в зависимости от состояния больного, может являться необходимым сокращение дозы облучения, в этом случае с некоторых ракурсов измерения могут просто не производиться, а быть синтезированными. В случае лазерной диагностики околоземного пространства (оптическая томография) также измерения производятся на поверхности Земли, а источник располагается на искусственном спутнике (боковой обзор отсутствует).

Итак, задача заключается в следующем: *известны значения функции $f(t, \theta)$ в угловом диапазоне от 0 до φ_0 , для решения требуется численно дополнить эти значения в диапазоне от φ_0 до π , и найти функцию $g(x, y)$.*

Математическое описание пополнения проекционной матрицы включает вышесказанное о процессе получения отклика объекта исследования на зондирующий сигнал и математическое описание процедуры расчёта моментов преобразования Радона для нахождения коэффициентов их разложения (используя аналог теоремы Пэли-Винера), с последующим синтезом недостающих проекций, также сюда входит определение регуляризирующего воздействия, учитывающего математическую некорректность исходной задачи.

Аналог теоремы Пэли-Винера (условие Кавальери) – Пусть \mathfrak{Z} пространство быстро убывающих C^∞ функций на \mathfrak{R}^2 и пусть S^1 единичная окружность. Тогда, для того чтобы функция $f(t, \theta)$ была двумерным преобразованием Радона от функции $g \in \mathfrak{Z}$, необходимо и достаточно, чтобы $f \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{R}^1 \times S^1)$, $f(t, \theta + \pi) = f(-t, \theta)$, и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \theta) t^k dt$$

был однородным многочленом степени k от $\cos \theta$ и $\sin \theta$ для любого $k \geq 0$.

Обозначим через $M_k(\varphi)$ момент k -го порядка от параллельной проекции

$$M_k(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \varphi) t^k dt. \quad (3)$$

Согласно аналогу теоремы Пэли-Винера, все $M_k(\varphi)$ являются однородными многочленами степени k от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ для любого $k \geq 0$

$$M_k(\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(\varphi) \sin^{k-l}(\varphi), \quad (4)$$

причём коэффициенты a_{lk} не зависят от угла φ .

Аналог теоремы Пэли-Винера предоставляет возможность восстанавливать проекционные данные в тех пространственных направлениях, где они отсутствуют. После этого можно проводить реконструкцию стандартными томографическими алгоритмами по пополненному набору проекций. Подход состоит в том, чтобы восстановить частично измеренную синограмму до той, которая является полной в её проекциях, отражает знание статистики шумов и является гладкой.

Алгоритм пополнения проекционных данных состоит из следующих этапов:

1. Нахождение коэффициентов в разложении (4) и восстановление моментов для недостающих направлений. По проекциям в известных направлениях вычисляются моменты заданных порядков. Для известных направлений в ограниченном диапазоне углов моменты можно найти по формуле (3). Подставив их в формулу (4), получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов a_{lk} для заданного порядка момента.
2. Пополнение проекционных данных по полученным моментам. Найденные моменты подставляются в выражение (3), в результате чего получается система уравнений, решая которую синтезируются недостающие проекционные данные.
3. Исследование систем уравнений, полученных в пунктах 1 и 2 и определение необходимого параметра, а именно, количество используемых моментов при пополнении проекций.

Пусть функция $f(t, \theta)$ (проекционные данные) задана на множестве $\mathfrak{T} = \{(t, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \varphi_0, -1 \leq t \leq 1\}$. Пусть измерено $N+1$ проекций в диапазоне углов $[0, \varphi_0]$ с равномерным шагом $\Delta\varphi$ по углу, J – количество измерений в каждой проекции. Обозначим через N_1 целую часть числа $(2\pi - \varphi_0)/\Delta\varphi$.

На первом шаге алгоритма по формуле (3) для каждой известной проекции вычисляются моменты от 1-го до K -го порядка включительно.

Найденные моменты подставляются в формулу (4), получается K систем линейных уравнений вида

$$\begin{cases} M_k(0) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(0) \sin^{k-l}(0), \\ M_k(\Delta\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(\Delta\varphi) \sin^{k-l}(\Delta\varphi), \\ M_k(2\Delta\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(2\Delta\varphi) \sin^{k-l}(2\Delta\varphi), \\ \vdots \\ M_k(N\Delta\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(N\Delta\varphi) \sin^{k-l}(N\Delta\varphi). \end{cases} \quad (5)$$

Каждая из систем (5) содержит $N+1$ уравнений и $k+1$ неизвестных. На следующем шаге по формуле (4) с использованием полученных коэффициентов a_{lk} вычисляются моменты с 1-го до K -го порядка для N_1 неизвестных проекций: $M_k(i\Delta\varphi)$, $i = N+1, N+2, \dots, N+N_1$. (Моменты нулевого порядка для всех проекций одинаковы.)

Представим интеграл (3) в виде конечной суммы

$$M_k(\varphi) = h \sum_{j=1}^J f(\varphi, t_j) (t_j)^k, \quad (6)$$

где h – шаг равномерной сетки, на которой заданы проекции. Выражение (6) представляет собой систему из $K+1$ линейных уравнений для определения значений неизвестных проекций в узлах сетки

$$\begin{cases} M_0(\varphi) = h \sum_{j=1}^J f(\varphi, t_j), \\ \vdots \\ M_k(\varphi) = h \sum_{j=1}^J f(\varphi, t_j) (t_j)^k, \\ \vdots \\ M_K(\varphi) = h \sum_{j=1}^J f(\varphi, t_j) (t_j)^K. \end{cases} \quad (7)$$

На последнем этапе производится *томографическая реконструкция* по набору из $N+N_1+1$ одномерных проекций; $N+1$ из них известно в результате измерений, а N_1 получено путём описанной выше процедуры.

Для реконструкции был выбран один из наиболее часто употребляемых в томографии алгоритмов, который был предложен Шеппом и Логаном. В алгоритме Шеппа-Логана фильтрация проекций в формуле обращения двумерного преобразования Радона осуществляется как свёртка с ядром

$$\varpi(ih) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 h^2} \frac{1}{1 - 4i^2}, & i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0 & |i| > J/2 \end{cases}$$

где J – число узлов равномерной сетки, в которых задана проекция, h – шаг этой сетки.

От выбора максимального порядка используемых моментов зависят как точность, так и время реконструкции. Проведено исследование одного из возможных критериев выбора количества первых моментов K , которые целесообразно использовать для синтеза недостающих проекционных данных, связанного с обусловленностью системы (5). В качестве K берется минимальный порядок момента, для которого выполняется неравенство $\bar{M}_K \leq \Delta M \cdot \text{cond}(A)$, где \bar{M}_K – среднее значение моментов порядка K известных проекций, ΔM – точность, с которой заданы эти моменты, $\text{cond}(A)$ – число обусловленности матрицы $\{a_{lk}\}$ системы (5) при $k = K$.

Таким образом, изложенный алгоритм позволяет выполнить томографическую реконструкцию в условиях неполноты проекционных данных.

В вычислительном эксперименте расчёты производились на квадратной сетке 512x512 узлов. Одномерные проекции вычислялись на сетке 512 узлов. Их распределение по углу в интервале от 0 до φ_0 было равномерным с шагом $\Delta\varphi$. Проекции искажались гауссовым случайным шумом с равным нулю средним и постоянной дисперсией $\sigma^2 = \xi \cdot \bar{f}^2$, где ξ – положительное число, \bar{f} – среднее значение проекционных данных в отсутствии шума.

В расчётах варьировались величина угла φ_0 , число проекций N , количество измерений в каждой проекции J , значение параметра ξ , определяющего уровень шума. Кроме того изменялись параметры, управляющие работой алгоритмов. Для контроля точности использовались нормированные среднеквадратичные ошибки восстановления отсутствующих проекций и реконструкции искомой функции, Δ_p и Δ соответственно

$$\Delta_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^J (f(\varphi_i, t_j) - \tilde{f}(\varphi_i, t_j))^2}{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^J (f(\varphi_i, t_j))^2}},$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I (g(x_i, y_j) - \tilde{g}(x_i, y_j))^2}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I (g(x_i, y_j))^2}}.$$

Через \tilde{f} и \tilde{g} обозначены оценки неизвестных проекционных данных и искомой функции, а через f и g – их истинные значения; N_1 – число генерируемых проекций; $\varphi_i = \Delta\varphi$.

Вычислительный эксперимент показал, что разработанный алгоритм, основанный на аналоге теоремы Пэли-Винера, позволяет с приемлемой точностью восстанавливать моменты проекций двумерных функций вплоть до 20-го порядка для широкого диапазона изменения входных параметров. При этом точность падает с увеличением порядка момента, с уменьшением интервала углов, в котором известны данные, а также с увеличением уровня шума. Кроме того точность восстановления нечетных моментов уменьшается по мере повышения симметрии объекта исследования. При нулевом шуме величина ошибки падает с увеличением числа моментов, используемых для восстановления. При шуме в 10% лучшая точность восстановления наблюдается при использовании 6-7-и первых моментов. При использовании большего числа моментов качество восстановления снижается. При умеренном шуме в исходных данных (до 10%) применение рассматриваемого метода позволяет существенно улучшить качество томографической реконструкции, в случае, когда известные проекции содержатся в угловом интервале 50 – 150 градусов.

Третья глава **«Описание программного комплекса «Палладиум» и его модельное использование»** посвящена вычислительному комплексу «Палладиум».

В этой главе дается описание программного комплекса «Палладиум», его возможностей и его реализации, основанной на методах объектно-ориентированного программирования и паттернах проектирования. Приводятся результаты численных исследований и модельных экспериментов на ЭВМ, проводится сравнение алгоритмов томографии, использующих условие Кавальери, в задачах с ограниченным углом обзора объекта. Рассматривается пример модельного использования программного обеспечения при реконструкции трудно-диагностируемого дефекта типа трещины, отслоения и поверхности склеивания, и приводится обобщение этого результата на случай межскважинного сейсмического просвечивания в условиях геотомографии, в том числе и для объектов горного дела.

Разработанное программное обеспечение решает следующие задачи: вычисление двумерных фантомов некоторых объектов и их преобразования Радона; расчёт интегральных моментов одномерных сечений преобразования Радона; вычисление коэффициентов однородного многочлена, соответствующего моменту заданного порядка; вычисление заданного момента для отсутствующих направлений; восстановление функции одной переменной по её моментам путём перехода к системе линейных алгебраических уравнений с последующим её решением; решение обратной задачи томографии. Программы снабжены удобным интерактивным интерфейсом (рис. 2) и графическим представлением двумерных и одномерных функций.

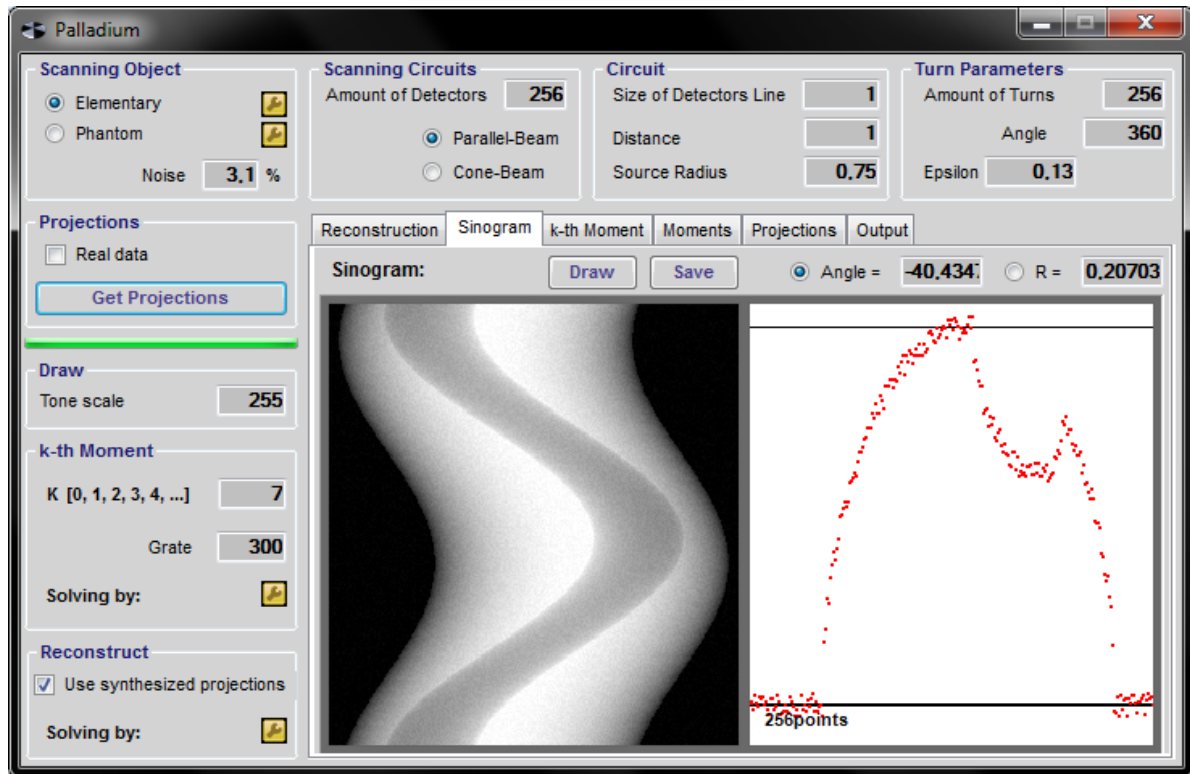


Рис. 2. Интерфейс программного комплекса «Палладиум»

Аналитический фантом, изображённый на рис. 3, приближает ситуацию при диагностике трещин и отслоений, в плане сокращения информативных лучей в проекциях, обусловленного относительно малым «раскрытием» дефектов в сравнении с томографируемым пространством.

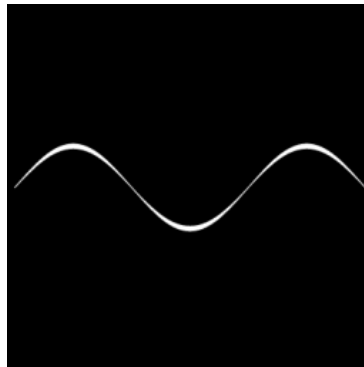
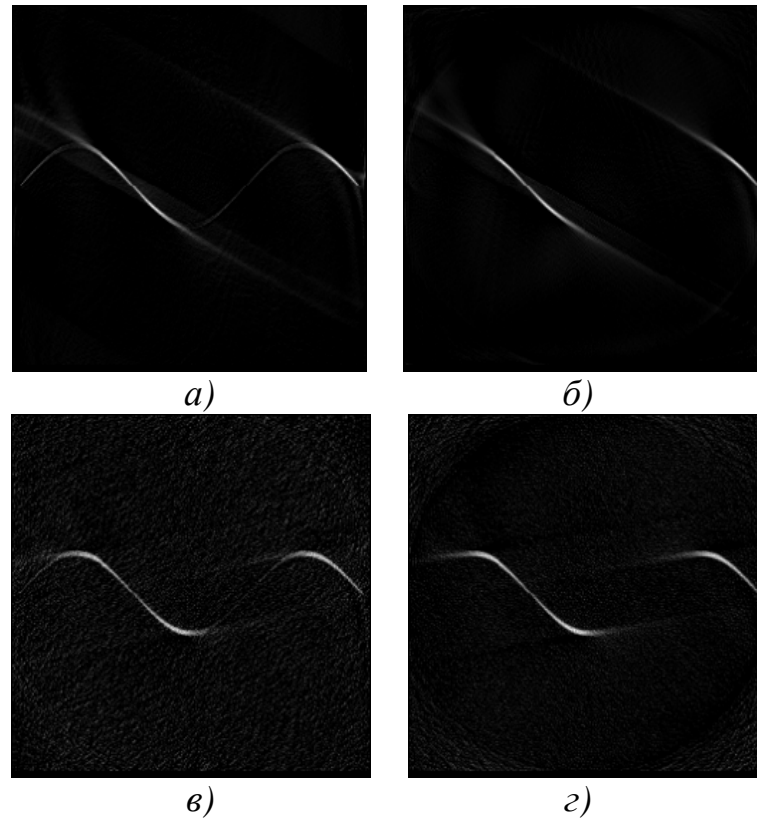


Рис. 3. Аналитический фантом, размер сетки 256x256.

Примеры полученных томограмм приведены на рис. 4. Количество проекций, использованных при вычислениях, равнялось 256. Ширина раскрытия дефекта 2% от диаметра исследуемой области. На рис. 4 а,г) шум в проекционных данных отсутствует, величина угла φ_0 – 60°. На рис. 4 б,в) шум составляет 5% от максимального значения проекции, величина угла φ_0 – 100°.



*Рис. 4. Реконструированные томограммы;
(а, в) – восстановление по пополненным данным,
(б, г) - восстановление по неполным данным.*

Без ограничения общности алгоритм ориентирован на трансмиссионный случай, но может быть также использован в условиях эмиссионной томографии, что характерно при диагностике низкотемпературной плазмы, и может быть использован в металлургии. Также, разработанный метод пополнения проекционных данных является перспективным для использования в геотомографии в случае однородных референтных сред и в условиях линерализации функции скорости (скоростное распределение зондирующего сигнала в исследуемой среде) возле линейной функции глубины в кинематической сейсмотомографии.

Типичным для геотомографии является отсутствие полноты томографических измерений, обусловленной невозможностью исследовать объект со всех требуемых направлений и наличие непрозрачных или слабо прозрачных для зондирующего сигнала включений в исследуемую среду (ослабленные трещиноватые зоны, сильно отражающие высокоплотные тела и т.д.). Примером такой ситуации служит межскваженная томография, когда и источники, и приемники располагаются на двух параллельных прямых, и изучается среда, расположенная в образовавшейся полосе (преобразование Радона в полосе). Облегченным вариантом межскваженной томографии является расположение указанных прямых под углом, например, расходящиеся горные выработки, имеющие общую

точку (вершина угла), либо вертикальные шахты, соединенные прямой на «дневной» поверхности, образующие букву «П». Использование методов пополнения недостающих проекционных данных способствует перспективе применения томографической диагностики в условиях горного дела для осуществления мониторинга состояния подземных сооружений вышележащего и подстилающего горного пространства.

Результаты вычислительного эксперимента приведены на рис. 5. На рис. 5 а) изображены аналитические фантомы, где источники и приемники располагаются в скважинах (левая и правая сторона квадрата) и на дневной поверхности (верхняя сторона квадрата), на нижней стороне нет ни источников, ни приемников для измерения. На рис. 5 б) представлены результаты решения обратной задачи.

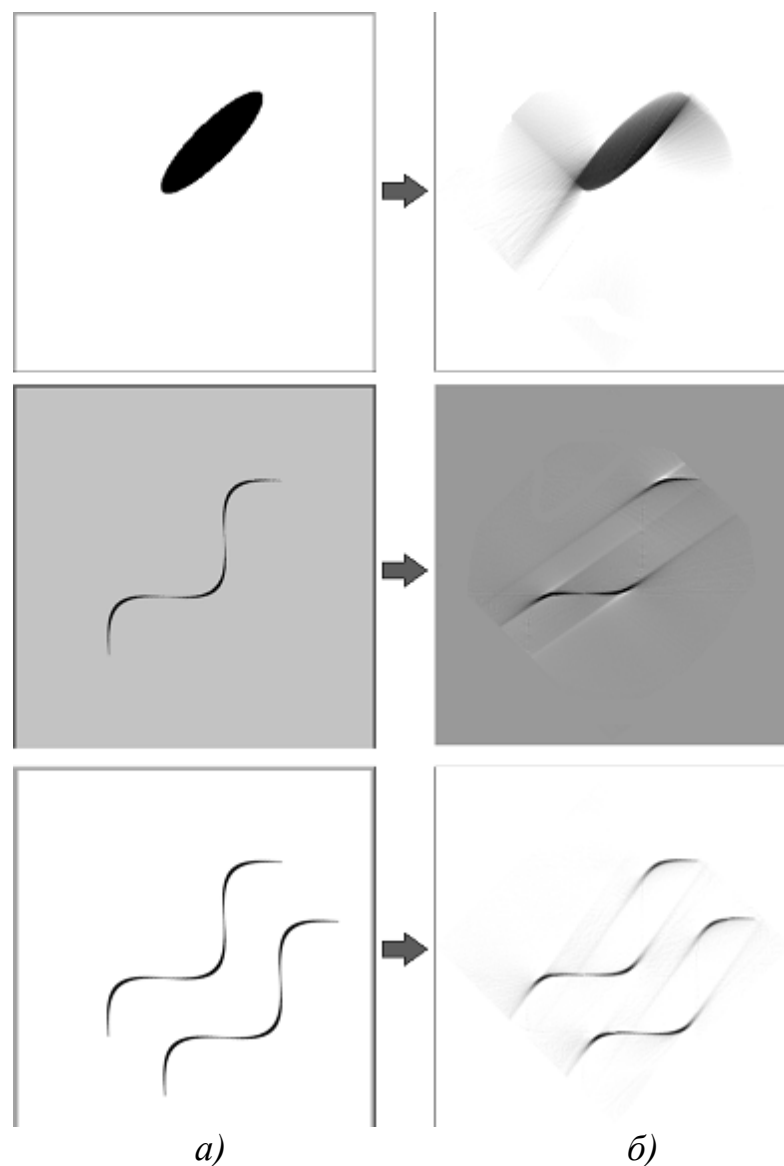


Рис. 5. Результаты вычислительного эксперимента: а) аналитическое представление объекта исследования, б) численное решение

Данные результаты в условиях геотомографии могут быть использованы не только для скважинных исследований, но и для ситуаций, где системы наблюдений имеют аналогичную геометрию. Например, диагностика пространства, заключенного между поверхностью земли и кровлей тоннеля метро, изучение залеганий месторождений угля в условиях горного дела при наличии шахт, тоннелей и тому подобного.

Проведённые исследования показали, что на основе условия Кавальери могут быть построены алгоритмы, позволяющие улучшить качество реконструкции по проекционным данным, заключённым в ограниченном диапазоне углов. Путём численного моделирования было установлено, что разработанный алгоритм и алгоритм пополнения проекционных данных в итерационном процессе обеспечивают практически такую же точность реконструкции, как и алгоритм, предложенный Принсом и Виллски. В то же время они зависят от меньшего числа параметров, для задания которых требуется дополнительная априорная информация. Быстродействие алгоритма пополнения проекционных данных в итерационном процессе зависит от числа итераций, необходимого для удовлетворительного восстановления проекций. В проведенных расчетах он оказался в 1,7–2,5 раза медленнее, чем другие алгоритмы. Кроме того время счёта разработанным алгоритмом при уменьшении угла обзора объекта не возрастает столь значительно, как алгоритмом Принса-Виллски.

ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные и практические результаты работы состоят в следующем:

1. Разработана математическая модель пополнения томографических данных в условиях неполноты проекционной матрицы, основанная на аналоге теоремы Пэли-Винера, отличающаяся общностью, поскольку не требует использования априорных знаний об объекте исследования, позволяющая решать обратную задачу томографии используя как исходные проекционные данные, так и синтезированные.

2. Разработан численный метод синтеза недостающих проекционных данных в отсутствующих пространственных направлениях, основанный на свойстве преобразования Радона для разложения моментов в однородный полином.

3. Восстановление функции одной переменной по её моментам возможно, когда известно не менее пяти первых моментов. Использование моментов более высокого порядка позволяет уменьшить ошибку восстановления только в случае, если моменты известны с достаточно высокой точностью. При низком уровне шума наиболее высокая точность реконструкции достигается, когда используются моменты до 12-го – 15-го порядка. Использование моментов, имеющих порядок больше этой

величины, приводит лишь к незначительному увеличению ошибки реконструкции. Если же их число более чем в 1.3 раза превосходит указанные значения, то наблюдается рост ошибки реконструкции.

4. При умеренном шуме в исходных данных (до 10%) применение рассматриваемого метода позволяет существенно улучшить качество томографической реконструкции в случае, когда известные проекции содержатся в угловом интервале 50 – 150 градусов. При шуме в 10% лучшая точность восстановления наблюдается при использовании 6-7-и первых моментов. При использовании большего числа моментов качество восстановления снижается.

5. Оптимальное количество моментов зависит от многих факторов, наиболее существенным из которых является уровень шума в проекционных данных. С его ростом количество используемых моментов следует уменьшать. Хорошим критерием для ограничения является наименьший порядок момента, абсолютная величина которого менее дисперсии шума. Для гладких функций число моментов, требуемых для получения решения достаточно высокого качества, ниже.

6. Расширены границы применимости томографической диагностики ситуаций с неполнотой проекционных данных, обусловленной: а) ограниченностью угла обзора, б) особенностью сканируемого объекта (дефектоскопия трещин, отслоений, поверхностей склеивания).

7. Разработана рабочая модель геометрии сложного дефекта с толщиной диагностируемого пространства (по дефекту), варьирующейся от 9% до 0.01% диаметра испытываемого объекта, при этом была исследована разрешающая способность алгоритма, помехоустойчивость к искажениям в векторе измерений случайным шумом, распределенным как по нормальному закону, так и равномерно.

8. Разработан программный комплекс «Палладиум», позволяющий решать прикладные задачи томографического диагностирования различных дефектов при неполных проекционных данных в условиях неразрушающего контроля промышленных изделий и производственных конструкций, медицинских исследованиях, оптической и сейсмической томографий в условиях, допускающих линеаризацию лучевых траекторий.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в периодических изданиях, рекомендованных ВАК

1. Важенцева, Н.В. Сравнение алгоритмов томографии, использующих условие Кавальери, в задачах с ограниченным углом обзора объекта / Н.В. Важенцева, А.В. Лихачёв // Автометрия. – Новосибирск. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 35–45.

2. Важенцева, Н.В. Математическое моделирование в задачах промышленной томографической диагностики в условиях неполноты

проекционных данных / Н.В. Важенцева, С.М. Зеркаль // Известия вузов. Черная металлургия. – 2013. – № 10. – С. 43–46.

Свидетельства о государственной регистрации

3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программный комплекс «Палладиум»» Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ № 2013660344 от 31 октября 2013 г. Авторы: Важенцева Н.В.

Труды научно-практических конференций и сборников

4. Важенцева, Н.В. Моделирование алгоритмов компьютерной томографии для неполных наборов данных / Н.В. Важенцева // Материалы XLVI международной научной студенческой конференция, Информационные технологии. – Новосибирск, 2008. – С. 134–135.

5. Важенцева, Н.В. Использование аналога теоремы Пэли-Винера для томографии по неполным проекционным данным / Н.В. Важенцева // Материалы XLVII международной научной студенческой конференция, Физика. – Новосибирск, 2009. – С. 8.

6. Важенцева, Н.В. Новый алгоритм двумерной томографии в ограниченном диапазоне углов / Н.В. Важенцева // Тезисы докладов молодежной международной научной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». – Новосибирск, 2009. – С. 28.

7. Важенцева, Н.В. Искусственное восстановление проекционных данных для томографии в ограниченном диапазоне углов / Н.В. Важенцева // Материалы XLVIII международной научной студенческой конференция, Информационные технологии. – Новосибирск, 2010. – С. 199.

8. Важенцева, Н.В. Новый метод повышения точности томографической реконструкции при ограниченном угле сканирования / Н.В. Важенцева, А.В. Лихачев // III Евразийский конгресс по медицинской физике и инженерии «Медицинская физика – 2010». – Сборник материалов. Т.1. М.: Изд-во МГУ. – С. 30–32.

9. Важенцева, Н.В. Новый алгоритм двумерной томографии по неполным проекционным данным / Н.В. Важенцева // ТРУДЫ НГАСУ. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2011. – Т. 14, № 1 (50). – С. 134–142.

10. Важенцева, Н.В. Сравнение алгоритмов двумерной томографии с ограниченным диапазоном углов [Электронный ресурс] / Н.В. Важенцева, А.В. Лихачев // Труды международной конференции "Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика", посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. – Новосибирск, 2011. – Режим доступа: <http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/39139/47722/Vazhentseva.pdf>.

11. Важенцева, Н.В. Новый метод трёхмерной томографии для неполных траекторий источника [Электронный ресурс] / Н.В. Важенцева, А.В. Лихачев // Труды международной конференции "Современные

проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика", посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. – Новосибирск, 2011. – Режим доступа:

http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/38813/46493/Likhachov_2.pdf.

12. Важенцева, Н.В. Результаты исследования алгоритма двумерной томографии при обнаружении тонких, протяженных дефектов / Н.В. Важенцева // Тезисы докладов XII всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – Новосибирск, 2011 г. – С. 44.

13. Важенцева, Н.В. Результаты исследования алгоритма двумерной томографии при неполноте проекционных данных, обусловленной ограничениями на угол сканирования / Н.В. Важенцева // ТРУДЫ НГАСУ. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2011. – Т. 14, № 3 (52). – С. 39–45.

14. Важенцева, Н.В. Сравнение алгоритмов томографии в задаче определения глубины трещин / Н.В. Важенцева, А.В. Лихачев // Материалы V Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные вопросы строительства». – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2012. – Т. 2. – С. 80–84.

15. Важенцева, Н.В. Исследование нового алгоритма трехмерной томографии по неполным данным / Н.В. Важенцева, А.В. Лихачев // Тезисы докладов международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики». – Новосибирск, 2012. – С. 178.

16. Важенцева, Н.В. Алгоритм двумерной томографии при ограниченном угле обзора объекта / Н.В. Важенцева // Тезисы докладов международной молодежной конференции «Нелинейные динамические системы: моделирование и оптимизация управления». – Новосибирск: НГТУ, 2012. – С. 61–63.

17. Важенцева, Н.В. Новый метод томографической диагностики дефектов типа трещин и отслоений в условиях ограничения на проекционные данные / Н.В. Важенцева // Тезисы докладов XIII всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – Новосибирск, 2012 г. – С. 56.

18. Важенцева, Н.В. Оценка возможности применения метода вычислительной томографии для диагностики состояния подземных сооружений зондирующим излучением. – Наукоемкие технологии разработки и использования минеральных ресурсов: сб. науч. статей / Н.В. Важенцева, С.М. Зеркаль // Сиб. гос. индустр. ун-т; под общей ред. В.Н. Фрянова. – Новокузнецк. – 2013. – С. 132–136.

19. Важенцева, Н.В. Решение томографической задачи в условиях неполноты проекционных данных с использованием условия Кавальери / Н.В. Важенцева // Справочник конференции «Математические и информационные технологии». – Белград, 2013. – С. 149.

20. Важенцева, Н.В. Вычислительное пополнение проекционных данных в условиях геотомографии. / Н.В. Важенцева // Природные и интеллектуальные ресурсы Сибири (СИБРЕСУРС-19-2013): доклады (материалы) 19-й Международной научно-практической конференции. – Томск: САН ВШ; В-Спектр, 2013. – С. 34 – 38.